Микроэкономика (2013/2014). Вывод функции спроса и кривой "цена-потребление".

Лектор: К.А. Паниди

Предположим, студент имеет некоторый еженедельный бюджет, который он распределяет между покупкой сэндвичей (X) и билетами в кино (Y). Его предпочтения относительно сэндвичей и кино описываются функцией полезности вида:

$$U(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Предельные полезности благ равны:

$$MU_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$MU_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Почему такая функция полезности может иметь отношение к реальным предпочтениям студента? Во-первых, чем больше сэндвичей студент может себе позволить или чем больше фильмов посмотреть, тем ему лучше. Это отражено в том, что функция полезности возрастает по x и y. Во-вторых, каждый дополнительный сэндвич, как и каждый дополнительный сеанс в кино приносит студенту всё меньшую полезность (предельная полезность товара X убывает по x и предельная полезность Y убывают по y), что вполне логично (десятый сэндвич или десятый фильм не так радует, как первый). В-третьих, разумно предположить, что предпочтения относительно сэндвичей и кино независимы друг от друга. Иными словами, количество сэндвичей, которое студент покупает, никак не влияет на дополнительную полезность, которую приносит каждый дополнительный сеанс в кино. И наоборот, количество просмотренных фильмов не влияет на дополнительную полезность от сэндвича. Это свойство отражено в том, что предельная полезность X не зависит от y и предельная полезность Y не зависит от x.

Выведем **функции спроса** на товары X и Y. Для этого решаем оптимизационную задачу:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \to \max_{x,y}$$

s.t.

$$p_1 x + p_2 y = M$$

Примечание: так как потребитель предпочитает большее количество товара X меньшему и большее количество товара Y меньшему (т.е. предпочтения монотонны, что видно из функции полезности), то рациональному потребителю не выгодно оставлять неистраченный доход. Таким образом, рациональный потребитель потратит все имеющиеся у него деньги, то есть оптимальный набор будет удовлетворять бюджетному ограничению в виде равенства.

Выразим y из бюджетного ограничения. Получим:

$$y = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x$$

Подставим это выражение в функцию полезности и решим задачу неограниченной оптимизации по переменной x:

$$U\left(x, \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x\right) = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x} \to \max_x$$

Интуитивный смысл этой процедуры: потребитель заинтересован в таком количестве товара X, которое в совокупности с товаром Y расходует весь его бюджет и при этом доставляет ему наибольший уровень благосостояния (т.е. полезности).

Условие первого порядка для поиска экстремума (first-order condition, FOC) - это равенство производной по x нулю:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{p_1}{p_2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x}} = 0$$

Мы можем переписать это равенство в виде:

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x}}{\sqrt{x}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Мы могли бы получить то же условие оптимума, исходя из равенства предельной нормы замещения отношению цен. Убедимся в этом.

Вычислим предельные полезности товаров X и Y:

$$MU_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$MU_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Тогда:

$$MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Чтобы понять интуитивный смысл этого условия оптимума, перепишем его в виде:

$$\frac{MU_x}{p_1} = \frac{MU_y}{p_2}$$

Предположим, сэндвич стоит $p_1 = 100$ рублей, а сеанс в кино $p_2 = 200$ рублей. Еженедельный бюджен студента на эти два блага составляет $M = 1200$ рублей. Допустим, студент потребляет 6 сэндвичей и дважды в неделю ходит в кино. Его уровень полезности в этом случае составляет $U = \sqrt{8} + \sqrt{2}$. Однако у студента остается в распоряжении еще 200 рублей. Ему необходимо решить, на какое из двух благ их потратить. Если он станет потреблять на один сэндвич в неделю больше, то прирост его полезности составит $\Delta U = U((6+1), 2) - U(6, 2) = \sqrt{7} - \sqrt{6} \approx MU_x(6, 2) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Таким образом, каждый дополнительный рубль, потраченный на седьмой сэндвич, увеличививает полезность на $\frac{MU_x(6,2)}{p_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{6}}}{100}$, а каждые дополнительные 100 рублей позволяют купить один дополнительный сэндвич, что увеличивает полезность на $MU_x(6, 2) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Каждый дополнительный сеанс в кино увеличивает полезность агента на $\Delta U = U(6, (2+1)) - U(6, 2) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx MU_y(6, 2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Каждый дополнительный рубль, потраченный на третий сеанс в кино, увеличививает полезность на

$\frac{MU_y(6,2)}{p_2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{200}$. Сравним эффективность одного дополнительного рубля, вложенного в сэндвич с эффективностью одного дополнительного рубля, вложенного в кино:

$$\frac{MU_x(6,2)}{p_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{6}}}{100} \vee \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{200} = \frac{MU_y(6,2)}{p_2}$$

Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{1}{4\sqrt{2}}$. В такой ситуации студент предпочтет потратить дополнительные 100 рублей на сэндвич, а не на кино и переместится в набор (7,2). Поскольку сэндвичи обладают убывающей предельной полезностью, то восьмой принесет меньшую дополнительную полезность, чем седьмой. В результате, с точки зрения полезности оставшиеся 100 рублей, потраченные на сэндвич принесут меньшую выгоду, чем предыдущие (т.к. $\Delta U = U((6+1),2) - U(6,2) = \sqrt{7} - \sqrt{6} > \Delta U = U((7+1),2) - U(7,2) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$). Если потребление кино при этом не меняется, то правая часть условия оптимума останется неизменной. В данном случае студенту будет по-прежнему выгоднее потратить 100 рублей на (теперь уже) восьмой сэндвич, чем отложить их на сеанс в кино. Когда же восьмой сэндвич приобретен, эффективность вложений в кино и еду уравнивается, и при этом бюджет студента полностью истощается.

Иными словами, с точки зрения денежных расходов один поход в кино эквивалентен двум сэндвичам. При этом с точки зрения дополнительной полезности один поход в кино эквивалентен двум сэндвичам только если сэндвичей 8, а фильмов 2 (т.к. только в этом случае $\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1}{2}$). То есть только при таком количестве сэндвичей и фильмов их относительная субъективная ценность совпадает с их относительной рыночной ценностью. В остальных случаях либо одна, либо другая ценность перевешивает, и становится выгодно увеличить или уменьшить потребление одного из благ.

Вернемся к условию оптимума и перепишем его с учетом бюджетного ограничения:

$$MRS_{xy} = \frac{\sqrt{\frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x}}{\sqrt{x}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Решим это уравнение относительно x:

$$p_2\sqrt{\frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x} = p_1\sqrt{x}$$

В результате получим функцию спроса на благо X:

$$x(p_1, p_2, M) = \frac{Mp_2}{p_1^2 + p_1p_2}$$

С учетом бюджетного ограничения получаем, что спрос на благо Y:

$$y(p_1, p_2, M) = \frac{Mp_1}{p_2^2 + p_1p_2}$$

Заметим, что оба эти выражения не могут быть отрицательными. Это означает, что точка касания бюджетного ограничения и кривой безразличия не может лежать в отрицательной области ни по X, ни по Y, т.е. решение всегда внутреннее.

Нам необходимо построить кривую **"цена товара X - потребление"**.
Для этого рассмотрим цену p_1 как параметр, а цену p_2 и доход M как константы. Это логично, так как чтобы изучить влияние на потребление только лишь цены p_1, необходимо, чтобы другие параметры не менялись. Наша кривая состоит из множества наборов, которые становится оптимально потреблять при изменении только цены p_1. Из функций спроса на X и Y сразу видно, что при снижении цены p_1 потребление X растет, и вместе с тем потребление Y падает. Таким образом, кривая "цена товара X - потребление"убывает.

Выразим цену p_1 из функции спроса на X. Получим:

$$p_1 = \frac{p_2^2 y}{M - p_2 y}$$

Попытаемся выразить цену p_1 из функции спроса на Y. Мы получим квардартное уравнение относительно p_1 (вспоминаем, что мы зафиксировали значения M и p_2):

$$xp_1^2 + xp_2p_1 - Mp_2 = 0$$

Оно имеет следующие два решения:

$$p_1 = \frac{-p_2x \pm \sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}}{2x}$$

Очевидно, одно из решений является отрицательным и не подходит, т.к. цена отрицательной быть не может. Оставим положительный корень. Так как цена p_1, полученная из спроса на X, и цена p_1, полученная из спроса на Y, должны совпадать (т.к. это одна и та же цена), то мы можем их приравнять:

$$\frac{p_2^2y}{M - p_2y} = \frac{-p_2x + \sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}}{2x}$$

Это уравнение связывает значения x и y, соответствующие различным значениям p_1.
Примечание: те, кто не понимает смысла этой операции, могут проделать следующее простое упражнение. Предположим, x описывается функцией от некоторого параметра a вида $x = 10 - a$, в то время как y описывается функцией вида $y = 30 - 2a$. Подставляя различные значения для a, полулчите соответствующие точки (x, y) и изобразите их на графике. Далее выразите параметр a из выражения для x и подставьте в выражение для y. Вы получите функцию, определяющую все комбинации x и y, которые могут получиться при различных значениях a. Убедитесь, что все ваши построенные точки описываются этой функцией.
Для сокращения записи обозначим $A(x) = \frac{-p_2x + \sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}}{2x}$. Тогда решив уравнение относительно y, получим, что:

$$y = \frac{A(x)M}{p_2^2 + p_2A(x)} = \frac{M\frac{-p_2x + \sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}}{2x}}{p_2^2 + p_2\frac{-p_2x + \sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}}{2x}} =$$

$$= \frac{M(\sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx} - p_2x)}{p_2^2x + p_2\sqrt{p_2^2x^2 + 4p_2Mx}} =$$

Эта функция и описывает нашу кривую "цена товара X - потребление".

Графическая иллюстрация этой кривой: